

معلومات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة.
- مدة إنجاز موضوع الامتحان: 3 ساعات.
- عدد الصفحات: 3 صفحات (الصفحة الأولى تتضمن معلومات و الصفحتان الثانية و الثالثة تتضمنان تمارين الامتحان).
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان في الترتيب الذي يناسبه.
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة.
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه و لا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة.

معلومات خاصة

يتكوّن الموضوع من ثلاثة تمارين و مسألة مستقلة فيما بينها و تتوزّع حسب المجالات التالية:

التمرين	المجال	النقطة الممنوحة
التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3
التمرين الثاني	حساب الاحتمال	2,5
التمرين الثالث	الأعداد العقدية	3
مسألة	دراسة دالة و المتتاليات و حساب التكامل	11,5

بالتوفيق

يسمح بالتوفيق باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

التمرين 1

الفضاء $\mathcal{E}$ منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نعتبر (S) الفلكة التي بالتوفيق معادلتها: $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z - 13 = 0$

(1) بين أن إحداثيات Ω مركز الفلكة (S) هي $\Omega(3; -1; 2)$ و شعاعها هو $R = 3\sqrt{3}$

(2) أ) تحقق أن النقطة $A(4; 4; 1)$ تنتمي للفلكة (S)

ب) حدد معادلة بالتوفيق المستوى (P) المماس للفلكة (S) في النقطة A

ج) لتكن N نقطة من المستوى (P) ، تحقق أن $\vec{OA} \cdot \vec{ON} = 27$

(3) نعتبر المستقيم (Δ) المار من النقطة $E(4; -5; 10)$ و الموجه بالتوفيق بالمجهة $\vec{U}(2, 1, 7)$

أ) حدد إحداثيات $\vec{OE} \wedge \vec{U}$ و استنتج أن المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S)

ب) حدد إحداثيات النقطة B بالتوفيق نقطة تماس (Δ) مع الفلكة (S)

ج) تحقق أن المستقيم (Δ) يوازي المستوى (P)

0.25+ 0.25

0.25

0.5

0.25

0.25+0.5

0.5

0.25

التمرين 2

E صندوق يحتوي بالتوفيق على ثلاث كرات تحمل الأرقام: 5 و 1 و 1

F صندوق يحتوي على خمس كرات تحمل الأرقام: 5 و 1 و 1 و 1 و 1

نسحب عشوائيا و تأنيا كرتين من E و كرتين بتتابع ودون إحلال من F فنحصل على أربع كرات.

كل الكرات غير قابلة بالتوفيق للتمييز باللمس

(1) نعتبر X المتغير العشوائي المرتبط بعدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 1

أ) تحقق أن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي 2 و 3 و 4

ب) بين أن $p(X=3) = \frac{8}{15}$ ثم حدد بالتوفيق قانون احتمال المتغير العشوائي X

(2) أحسب احتمال H "الكرتان المسحوبتان من E تحملان الرقم 1 علماً أن مجموع أرقام الكرات الأربع المسحوبة يساوي 8"

0.5

1+0.5

0.5

التمرين 3

المستوى العقدي منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقاط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي $a = 3 + 2i$ و $b = \bar{a}$ و $c = 1$ و $d = 3 - 3i$

(1) حل في $\mathbb{C}$ بالتوفيق المعادلة: $z^2 - 6z + 13 = 0$

(2) بين بالتوفيق أن: $\frac{a-c}{b-c} = i$ و استنتج طبيعة المثلث ABC

(3) بين أن A هي صورة B بالتحاكي h الذي مركزه D و نسبته 5

(4) أ) أكتب العدد d على بالتوفيق الشكل المثلثي

ب) استنتج أن: $(\frac{d}{\sqrt{18}})^{2018} + i = 0$

0.5

0.5+0.5

0.5

0.5

0.5

بالتوفيق

مسألة

نعتبر الدالة f بالتوفيق المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = \ln(\sqrt{1+9x^2} + 3x)$

C_f منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$

(I) 1 تحقق أن $f(x) + f(-x) = 0$ لكل x من $\mathbb{R}$ و استنتج أن الدالة f فردية

0.25+0.25

(2) أ) تحقق أن $f(x) = \ln x + \ln(3 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 9})$ لكل x من $]0, +\infty[$ و أحسب بالتوفيق $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

0.25+0.25

ب) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ و أعط تأويلاً هندسياً للنتيجة. www.SalmiMath.com

0.5

ج) تحقق أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (ضع $t = -x$ و استعمل f فردية)

0.5

(3) بين أن $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{1+9x^2}}$ لكل x من $\mathbb{R}$ و بالتوفيق ضع جدول التغيرات على $\mathbb{R}$

0.25+0.5

(4) أحسب $f(0)$ و $f'(0)$ و حدّد معادلة المستقيم (T) المماس ل C_f في النقطة $O(0,0)$

0.5

(II) نعتبر الدالة $g(x) = f(x) - x$ حيث $x \in [0, +\infty[$

(1) تحقق أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ (يمكنك استعمال نتيجة السؤال (I) 2 ب)

0.25

(2) بين أن $g'(x) = \frac{8-9x^2}{\sqrt{1+9x^2} \cdot (3+\sqrt{1+9x^2})}$ و ضع بالتوفيق جدول التغيرات على $[0, +\infty[$ ، نأخذ: $g(\frac{2\sqrt{2}}{3}) \approx 0,8$

0.5+0.25

(3) أ) بين أنه على المجال $[\frac{2\sqrt{2}}{3}, +\infty[$ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α بالتوفيق

0.5

ب) استنتج بالتوفيق أن $g(x) \leq 0$ لكل x من $[\alpha, +\infty[$ و أن $g(x) \geq 0$ لكل x من $[0, \alpha]$

0.5

(4) استنتج الوضع النسبي ل C_f و المستقيم $y = x$ على المجال $[0, +\infty[$

0.25

(5) تحقق أن $\sqrt{1+9\alpha^2} = e^\alpha - 3\alpha$ (لاحظ أن $f(\alpha) = \alpha$)

0.25

(III) 1 بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده

0.25

(2) أنشئ في نفس المعلم المنحنى C_f و (T) و المستقيم $y = x$ و المنحنى $C_{f^{-1}}$ (نأخذ $2,8 < \alpha < 2,9$)

1

(3) حدّد صيغة بالتوفيق الدالة $f^{-1}(x)$ لكل x من J

0.5

(IV) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة ب $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ بالتوفيق

(1) بين بالترجع أن $\forall n \in \mathbb{N}: \alpha \leq u_n \leq 4$ (نأخذ $f(4) \approx 3,2$)

0.75

(2) بين أن المتتالية (u_n) بتاقصية (يمكنك استعمال نتيجة (II) 3 ب)

0.5

(3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدّد نهايتها.

0.5+0.25

(V) 1 تحقق أن $x \mapsto \frac{1}{3}\sqrt{1+9x^2}$ هي دالة بالتوفيق أصلية للدالة $x \mapsto \frac{3x}{\sqrt{1+9x^2}}$ على $\mathbb{R}$

0.25

(2) بين باستعمال مكاملة بالأجزاء أن: $\int_0^\alpha \ln(3x + \sqrt{1+9x^2}) dx = \alpha^2 + \alpha + \frac{1-e^\alpha}{3}$ (في التعويض استعمل (II) 5)

1

(3) حدّد بدلالة α مساحة الحيز المحصور بين C_f و المستقيم $y = x$ و المستقيمين $x = 0$ و $x = \alpha$

0.5

(4) استنتج بدلالة α مساحة الحيز المحصور بين C_f و $C_{f^{-1}}$ و المستقيمين $x = 0$ و $x = \alpha$ بالتوفيق

0.25